Äquivalenzrelationen

1.27 Def: Eine **Relation** auf einer Menge M ist eine Teilmenge

$$R_\sim \subseteq M \times M$$

Notation: für $m, n \in M$:

$$m \sim n \;:\Longleftrightarrow\; (m,n) \in R_\sim$$

„steht in Relation zu"

Beispiele:

(i) $M = \mathbb{Z}$,

$$R_\sim := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \wedge y < 0\}$$

und

$2 \sim -3$

$2 \not\sim 2$ nicht reflexiv

(ii) $M = \mathbb{Z}$,

$$R_\sim := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y \}$$

gleich ü

$2 \not\sim -3$

$2 \sim 2$ Äquivalenzrelation.

(iii) $f : M \longrightarrow B$ Abbildung definiert eine Relation auf M

durch

$$m \sim_f m' \;:\Longleftrightarrow\; f(m) = f(m').$$

$$\left(R_f := \{(m,m') \in M \times M \,/\, f(m) = f(m')\}\right)$$

Äquivalenzrelation

1.28 Def: Relation $R_\sim$ auf M ist

... reflexiv $:\Longleftrightarrow \forall m \in M: \; m \sim m$

... symmetrisch $:\Longleftrightarrow \left(\forall m, n \in M: \; m \sim n \Leftrightarrow n \sim m\right)$

... transitiv $:\Longleftrightarrow \left(\forall m, n, l \in M: \; m \sim n \wedge n \sim l \Rightarrow m \sim l\right)$

Sind alle 3 Eigenschaften erfüllt, heißt $\sim$ Äquivalenzrelation.

1.29 Def: Sei $R_\sim$ Äquivalenzrelation auf M. Für $m \in M$ heißt

$$[m] := \{m' \in M \mid m' \sim m\}$$

Äquivalenzklasse von m.

Die Menge der Äquivalenzklassen

$$M/\sim := \{[m] \mid m \in M\} \subseteq \mathcal{P}(M)$$

heißt Quotientenmenge von M bezüglich $\sim$.

Die surjektive Abbildung

$$q: \begin{aligned} M &\longrightarrow M/\sim \\ m &\longmapsto [m] \end{aligned}$$

heißt kanonische Projektion.

1.30 Notiz: $[m] = [n] \iff m \sim n$

(($\Rightarrow$) Wegen Reflexivität $m \in [m]$,
also folgt $m \in [n]$,
d.h. $m \sim n$

($\Leftarrow$) Sei $m \sim n$. (2)

$[m] \subseteq [n]$: Für $x \in [m]$ ist $x \sim m$. (1)

Wegen Transitivität folgt $x \sim n$.

D.h. $x \in [n]$.

$[m] \supseteq [n]$: ähnlich, nutze Symmetrie.)

1.31 Satz: Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von M:

① verschiedene Klassen sind disjunkt

$$([m] \neq [n] \Rightarrow [m] \cap [n] = \emptyset)$$

② Vereinigung aller Klassen ist M.

$$\left(\bigcup_{m \in M} [m] = M \right)$$

Beweis:

zu 1: Wir zeigen

$$(\exists x \in [m] \cap [n]) \Rightarrow [m] = [n]$$

(Beweis durch Kontraposition)

Sei also $x \in [m] \cap [n]$.

Dann ist $x \sim m$ und $x \sim n$.

Wegen Symmetrie:

$$m \sim x \quad \text{und} \quad x \sim n$$

Wegen Transitivität:

$$m \sim n,$$

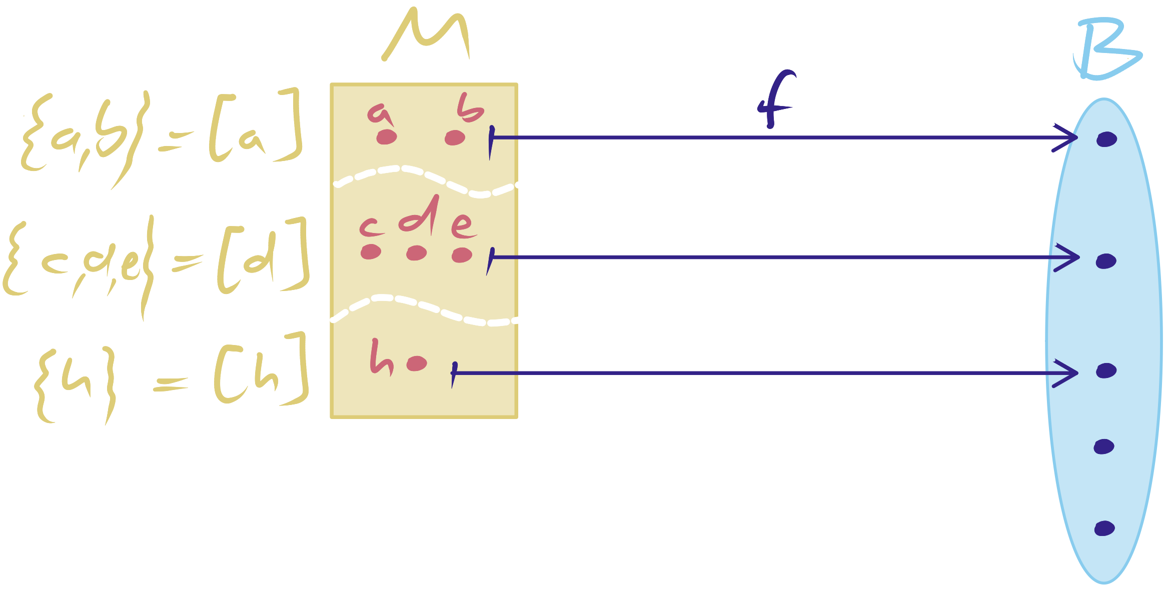
daher $[m] = [n]$ (siehe Notiz 1.30)

zu 2: Übung $(m \in [m])$ $\square$

Beispiel: Sei $f: M \longrightarrow B$ Abb.

$m \sim_f m' \iff f(m) = f(m')$

wie oben



Äquivalenzklassen sind die Fasern von f:

$$[m] = f^{-1}(f(m))$$

1.32 Satz: Jede Abbildung $f: A \to B$ lässt sich kanonisch zerlegen („faktorisieren") in folgende Komposition:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & & B \\
A/\sim_f \arrow[r, "\bar{f}", "\cong"'] & f(A) \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

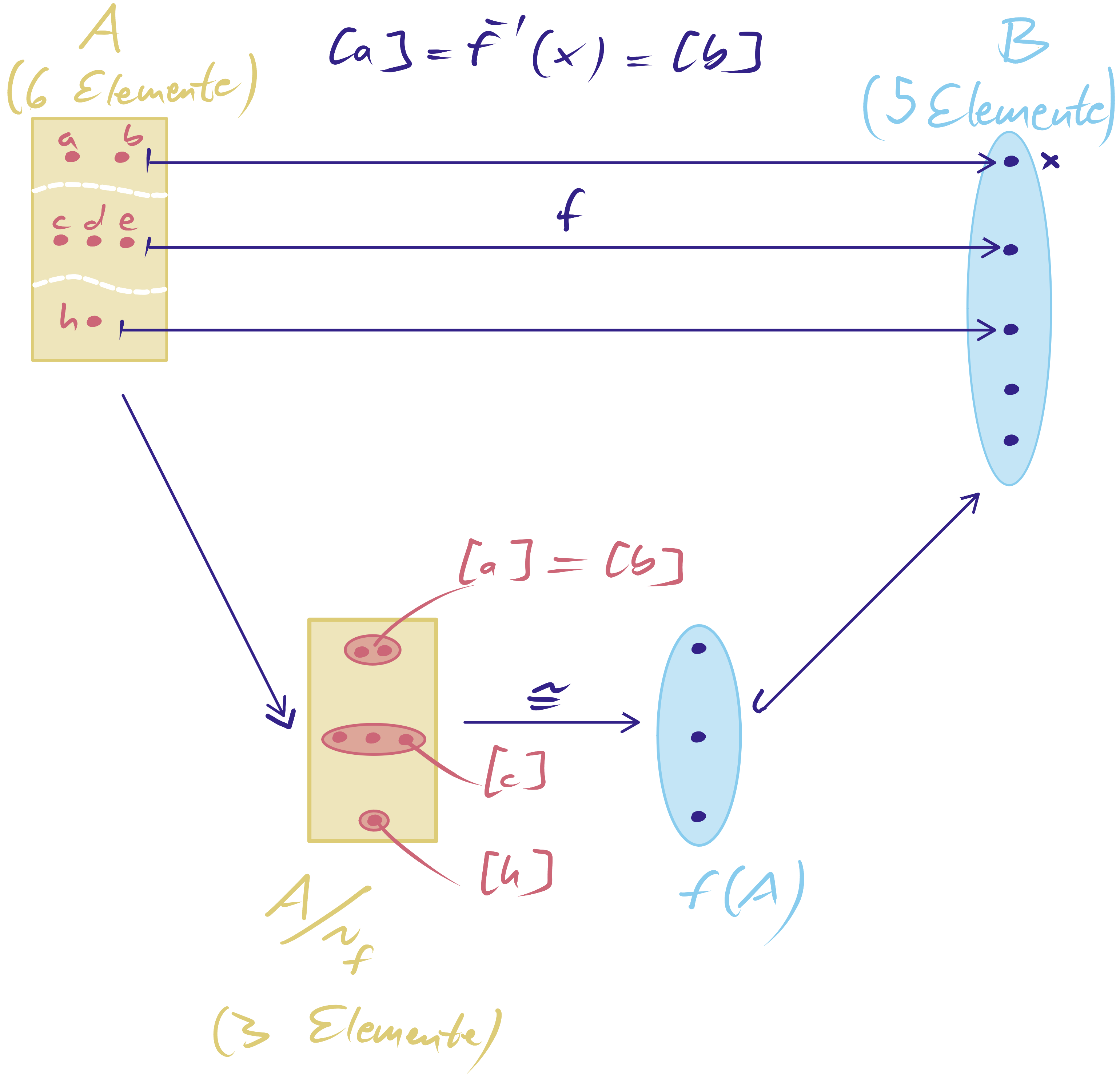
$$[a] \longmapsto f(a)$$

Menge der Fasern von f

$[a] = f^{-1}(f(a))$

Hier ist q surjektiv,
$\bar{f}$ Isomorphismus,
i injektiv.

Beispiel:



A
(6 Elemente)
$[a] = f^{-1}(x) = [b]$
B
(5 Elemente)
a b
c d e
h
f
x
$[a] = [b]$
$\cong$
$[c]$
$[h]$
$f(A)$
$A/\sim_f$
(3 Elemente)

Beweis:

q surjektiv ✓, i injektiv ✓

$\bar{F}$ wohldefiniert:

Sei $[a]=[a']$.

Dann ist $a \sim_f a'$, d.h. $f(a)=f(a')$.

Also ist $\bar{F}([a])=\bar{F}([a'])$.

$\bar{F}$ surjektiv: Übung.

$\bar{F}$ injektiv: Sei $\underbrace{\bar{F}([a])} = \underbrace{\bar{F}([a'])}$,

also $f(a) = f(a')$,

d.h. $a \sim_f a'$,

also $[a] = [a']$.

$i \circ \bar{F} \circ q = f$: Übung. $\square$